



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL
EDUCAȚIEI

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Locală –Ialomița, 10.02.2024

CLASA a VIII-a

Problema 1.

a) Stabiliți dacă numărul:

$$A = \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \frac{11}{25 \cdot 36} \text{ aparține intervalului } \left(\frac{1}{9} ; \frac{1}{3} \right).$$

b) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \in (-2 ; 6)$ și $y \in (-5 ; 3)$, arătați că numărul:

$$B = \sqrt{(x + y - 9)^2} + \sqrt{(x + y + 7)^2} \text{ este pătrat perfect.}$$

Problema 2.

Dacă pentru $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0$, să se arate că

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} \right) \cdot (b - a) = 1.$$

Problema 3.

Fie prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCD A^1 B^1 C^1 D^1$ cu $AB=6$ cm, $AA^1 = 6\sqrt{3}$ cm, iar E este simetricul lui D față de C și punctele M și N sunt mijloacele diagonalelor AD^1 , respectiv AB^1 .

a) Demonstrați că dreptele BE și MN sunt perpendiculare;

b) Aflați sinusul unghiului format de dreptele $C^1 D$ și $B^1 C$.

Problema 4.

Se consideră cubul $ABCD A^1 B^1 C^1 D^1$, centrul O al feței ABCD, iar punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv BC. Arătați că dreptele $D^1 B$, $A^1 N$, $C^1 M$ și $B^1 O$ sunt concurente.

Suplimentul G.M. Nr. 10/2023

Timp de lucru: 3 ore.



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL
EDUCAȚIEI

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Barem de corectare și notare

Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Stabiliți dacă numărul:

$$A = \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \frac{11}{25 \cdot 36} \text{ aparține intervalului } \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3} \right).$$

b) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \in (-2, 6)$ și $y \in (-5, 3)$, arătați că numărul:

$$B = \sqrt{(x + y - 9)^2} + \sqrt{(x + y + 7)^2} \text{ este pătrat perfect.}$$

a)	$cum \frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$	1p
	$A = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36}$	1p
	$A = \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$	1p
	$\frac{1}{9} < \frac{2}{9} < \frac{1}{3}; \frac{1}{9} < \frac{2}{9} < \frac{3}{9}$, deci $A \in \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3} \right)$	1p
b)	$B = \sqrt{(x + y - 9)^2} + \sqrt{(x + y + 7)^2} = x + y - 9 + x + y + 7 $	1p
	$x \in (-2, 6) \rightarrow -2 < x < 6$ $y \in (-5, 3) \rightarrow -5 < y < 3$ $-16 < x + y - 9 < 0$ $0 < x + y + 7 < 16$	1p
	$ x + y - 9 = -x - y + 9$ $ x + y + 7 = x + y + 7$	1p
	$B = (-x - y + 9) + (x + y + 7) = 16 = 4^2 = \text{pătrat perfect}$	1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL
EDUCAȚIEI

Problema 2.

Dacă pentru $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0$, să se arate că

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right) \cdot (b - a) = 1.$$

	$a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = (a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2$	2p
	$(a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = 0$ $(a - \sqrt{2})^2 \geq 0$, oricare $a \in \mathbb{R}$ $(b - \sqrt{3})^2 \geq 0$, oricare $b \in \mathbb{R}$ $\rightarrow (a - \sqrt{2})^2 = 0$ și $(b - \sqrt{3})^2 = 0$	2p
	$a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{3}$	1p
	$\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$	2p



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL
EDUCAȚIEI

Problema 3.

Fie prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCD A^1 B^1 C^1 D^1$ cu $AB=6$ cm, $AA^1 = 6\sqrt{3}$ cm, iar E este simetricul lui D față de C și punctele M și N sunt mijloacele diagonalelor AD^1 , respectiv AB^1 .

a) Demonstrați că dreptele BE și MN sunt perpendiculare;

b) Aflați sinusul unghiului format de dreptele $C^1 D$ și $B^1 C$.

a)	MN este linie mijlocie în triunghiul $AB^1 D^1$, deci este paralelă cu $B^1 D^1$ $DBB^1 D^1$ este dreptunghi (sau paralelogram!), deci $B^1 D^1$ este paralelă cu BD, Deci MN este paralelă cu BD, Unghiul format de dreptele BE și MN este congruent cu unghiul format de dreptele BE și BD, adică este unghiul DBE.	1p
	E este simetricul lui D față de C, $DC = CE = 6$ cm, C este mijloc DE $BC = 6$ cm, BC este mediană în BDE, deci triunghiul BDE este dreptunghic cu unghiul $DBE = 90^0$ (reciproca Teoremei medianei)	1p
	cum unghiul $DBE = 90^0$ dreptele BE și MN sunt perpendiculare	1p
b)	$DCB^1 A^1$ este dreptunghi (sau paralelogram!), deci $B^1 C$ este paralelă cu $A^1 D$ unghiului format de dreptele $C^1 D$ și $B^1 C$ este congruent cu unghiul format de dreptele $C^1 D$ și $A^1 D$ adică este unghiul $A^1 D C^1$.	1p
	$DC^1 = 12$ cm, $A^1 D = 12$ cm, $B^1 D^1 = 6\sqrt{2}$ cm, triunghiul $A^1 D C^1$ este isoscel cu baza $B^1 D^1$. Fie O mijlocul bazei $B^1 D^1$, $B^1 O = D^1 O = 3\sqrt{2}$ cm $DO = 3\sqrt{14}$ cm	1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL
EDUCAȚIEI

	Aria triunghiul $A^I D C^I = 18\sqrt{7} \text{ cm}^2$	1p
	Aria triunghiul $A^I D C^I = (A^I D \cdot D C^I \cdot \sin A^I D C^I) : 2 = 18\sqrt{7} \text{ cm}^2$ $\sin A^I D C^I = \frac{\sqrt{7}}{4}$	1p

Problema 4.

Se consideră cubul $ABCD A^I B^I C^I D^I$, centrul O al feței $ABCD$, iar punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB , respectiv BC . Arătați că dreptele $D^I B$, $A^I N$, $C^I M$ și $B^I O$ sunt concurente.

Suplimentul G.M. Nr. 10/2023

	Cum $ABCD A^I B^I C^I D^I$ – cub, DD^I este paralelă și egală cu BB^I , deci $BDD^I B^I$ este paralelogram (dreptunghi!), $\rightarrow BD$ este paralelă și egală cu $B^I D^I$, Notez cu $2a =$ muchia cubului, $BD = 2a\sqrt{2}$ O centrul feței $ABCD \rightarrow BO = a\sqrt{2}$	1p
	BD este paralelă cu $B^I D^I$, $O \in BD \rightarrow BO$ este paralelă cu $B^I D^I$, conform TFA ΔBPO este asemenea cu $\Delta D^I P B^I$, unde $D^I B \cap B^I O = \{P\}$; $BP/PD^I = OP/PB^I = BO/B^I D^I = 1/2$; $BP/B^I D^I = 1/3$ (1)	1p
	Cum $ABCD A^I B^I C^I D^I$ – cub, $C^I D^I$ este paralelă și egală cu AB , deci punctele C^I, D^I, A și B sunt coplanare, $M \in AB$ și M – mijlocul lui $AB \rightarrow BM$ este paralelă cu $C^I D^I$, $BM = a$; $2a =$ muchia cubului conform TFA $\rightarrow \Delta BTM$ este asemenea cu $\Delta D^I T C^I$, unde $D^I B \cap C^I M = \{T\}$. $BT/TD^I = MT/TC^I = BM/C^I D^I = 1/2$, $BT/B^I D^I = 1/3$ (2)	1p
	Din (1) și (2) $\rightarrow P = T$, deci dreptele $D^I B$ și $C^I M$ sunt concurente în punctul P , punct aflat pe $B^I D^I$ încât $BP/B^I D^I = 1/3$	1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL
EDUCAȚIEI

	Dar, $D^I B \cap B^I O = \{P\}$, deci dreptele $D^I B$, $C^I M$ și $B^I O$ sunt concurente în P (3)	
	Cum $ABCD A^I B^I C^I D^I$ – cub, $A^I D^I$ este paralelă și egală cu BC , Deci, punctele A^I , D^I , B și C sunt coplanare $N \in AB$ și N – mijlocul lui $BC \rightarrow BN$ este paralelă cu $A^I D^I$, $BN = a$; $2a =$ muchia cubului conform TFA $\rightarrow \Delta BEN$ este asemenea cu $\Delta D^I E A^I$, unde $D^I B \cap A^I N = \{E\}$. $BE/ED^I = NE/EA^I = BN/A^I D^I = 1/2$, $BE/B^I D^I = 1/3$ (3)	1p
	Din (1) și (3) $\rightarrow E=P$, deci dreptele $D^I B$ și $A^I N$ sunt concurente în punctul P , punct aflat pe $B^I D^I$ încât $BP/B^I D^I = 1/3$ (4)	1p
	Din (3) și (4) rezultă că $D^I B$, $A^I N$, $C^I M$ și $B^I O$ sunt concurente în punctul P , punct aflat pe $B^I D^I$ încât $BP/B^I D^I = 1/3$	1p